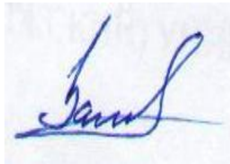
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



Замалиев Руслан Рашидович

О ПРЯМЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА С ОСОБЕННОСТЯМИ В ЯДРЕ

Специальность 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2012

Работа выполнена на кафедре теории функций и приближений ФГАОУВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Габбасов Назим Салихович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Гарифьянов Фархат Нургаязович

кандидат физико-математических наук, Соловьева Светлана Александровна

Ведущая организация: Национальный исследовательский Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Защита состоится "16" февраля 2012 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д212.081.10 при ФГАОУВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, ауд. 337.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского ФГАОУВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автореферат разослан "__" января 2012 г. и размещен на официальном сайте ФГАОУВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет": www.ksu.ru

Ученый секретарь совета Д 212.081.10
к.ф.-м.н., доцент Е.К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена методам решения линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с фиксированными особенностями в ядре.

Актуальность темы. Теория интегральных уравнений была и остается одной из центральных областей математики и ее приложений. К настоящему времени наиболее полные результаты получены по решению регулярных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра первого и второго родов, сингулярных интегральных уравнений. Подробный обзор установленных результатов и обширную библиографию можно найти в справочных пособиях А.Ф. Верланя и В.С. Сизикова, В.В. Иванова, в специальных обзорных работах Б.Г. Габдулхаева, З. Пресдорфа, И.К. Лифанова и Е.Е. Тыртышникова, а также в монографиях С.М. Белоцерковского и И.К. Лифанова, Г.М. Вайникко, В. Вольтерра, Б.Г. Габдулхаева, Ф.Д. Гахова, В.В. Иванова, Л.В. Канторовича и Г.П. Акилова, Л.В. Канторовича и В.И. Крылова, М.Л. Краснова, И.К. Лифанова, А.Ю. Лучки и Т.Ф. Лучка, С.Г. Михлина и Х.Л. Смолицкого, Н.И. Мусхелишвили, З. Пресдорфа и др. В то же время ряд важных задач теорий упругости, плазмы, переноса нейтронов, рассеяния частиц, а также теорий уравнений смешанного типа и сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом приводит к уравнению третьего рода

$$Ax \equiv \nu(t)x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t) \quad (t \in [a,b]), \tag{1}$$

где λ — числовой параметр, коэффициент $\nu(t)$ — непрерывная функция, имеющая на отрезке $[a,b]$ конечное множество нулей степенного порядка, $K(t,s)$ и $y(t)$ — известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами “гладкости”, а $x(t)$ — искомая функция. Первые результаты по уравнениям третьего рода, скорее всего, принадлежат Э. Пикару, именно он назвал уравнения вида (1) интегральными уравнениями третьего рода. Им было рассмотрено модельное уравнение вида (1), где $\nu(t) = t$, $a < 0 < b$, $K(t,s)$ и $y(t)$ — аналитические функции. Методом сведения к сингулярному интегральному уравнению он указал необходимые и достаточные условия существования аналитических решений. Дальнейшие исследования уравнений третьего рода были продолжены в работах Ш. Платрие, А.Р.Хволеса, В.Шмайдлера, В.А. Морозова, Х.Г. Бжихатлова, В.Б. Короткова и П.Н. Денисенко. Во всех этих работах решение уравнений ищется в классических пространствах (аналитических, непрерывных, интегрируемых или других функций) и при этом не привлекается аппарат обобщенных функций. Обнаружилось, что очень часто естественными классами решений ряда прикладных задач, приводящихся к уравнениям третьего рода, являются специальные пространства обобщенных функций типа D или типа V. Под D понимается пространство обобщенных функций, построенных при помощи функционала "дельта-функция Дирака", а под V — пространство обобщенных функций, построенных при помощи "конечной части интеграла по Адамару". Впервые в пространстве обобщенных функций уравнение третьего рода исследовалось Г.Р. Бартом и Р.Л. Варноком. Их исследования были продолжены и развиты в работах В.С. Рогожина и С.Н. Расламбекова, Г.Р. Барта, Н. Сукаванама, К.Б. Бараталиева, С.Н. Расламбекова. Все эти работы посвящены теории Нетера для соответствующих уравнений третьего рода в классах непрерывных, интегрируемых и обобщенных функций. Подробный обзор полученных результатов и библиографию можно найти в монографии Н.С. Габбасова (2006 г.). В диссертации Абдурахмана (2003 г.) исследовано уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части. В предположении, что исходные данные являются точечно "гладкими", построена теория Нётера для соответствующих уравнений третьего рода в классах гладких и обобщенных функций. В статье Д. Шулаи (2007 г.) рассмотрены уравнения третьего рода с коэффициентом $cos\ t$, имеющим на промежутке интегрирования конечное множество нулей. В случае гёльдерова ядра интегрального оператора и правой части из класса Мусхелишвили методами теории сингулярных интегральных уравнений установлены необходимые и достаточные условия разрешимости исследуемых уравнений в классе Мусхелишвили.

Уравнения третьего рода точно решаются лишь в очень редких частных случаях, поэтому разработка теоретически обоснованных эффективных методов их приближенного решения в пространстве обобщенных функций является актуальной задачей. Первые результаты в этом направлении получены в работах Н.С. Габбасова, который исследовал уравнения третьего рода с коэффициентом, имеющим на отрезке интегрирования конечное множество нулей любого степенного порядка. Им были предложены и обоснованы как классические, так и специальные прямые методы решения этих уравнений. При этом по решению общих уравнений третьего рода в пространстве типа D получены в определённом смысле окончательные результаты, а в классе типа V подробные исследования проведены в частных случаях в зависимости от характера нулей коэффициента уравнения. В статье В.А. Золотаревского (2003 г.) некоторые результаты Н.С. Габбасова (1990 г.) в частном случае пространства типа D перенесены на уравнения третьего рода в комплексной плоскости. Диссертация С.А. Соловьевой (2007 г.) посвящена приближенному решению общих уравнений третьего рода в пространстве типа V. В работе построены и обоснованы оптимальные по порядку точности прямые проекционные методы решения изучаемых уравнений.

Дальнейшее развитие теории уравнений третьего рода с регулярными ядрами и упомянутые выше приложения привели к необходимости исследования уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре. В статье В. Янга и М. Цуи (2008 г.) исследовано уравнение третьего рода с коэффициентом, имеющим простые нули, и ядром с особенностью в начале промежутка интегрирования. Предполагая исходные данные точечно “гладкими”, построено точное решение в виде ряда в пространстве производящих ядер. Показано, что частичные суммы (т.е. приближенные решения) порождают монотонно убывающую последовательность погрешностей. В работе Л. Фермо (2009 г.) рассмотрено уравнение третьего рода с коэффициентом, имеющим на бесконечном промежутке интегрирования один нуль степенного порядка меньше единицы. При этом ядро интегрального оператора имеет слабую особенность, а правая часть уравнения является достаточно гладкой. В зависимости от промежутка интегрирования исследуемое уравнение третьего рода редуцировано либо к одному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, либо к системе двух таких фредгольмовых уравнений. Приближенные решения последних построены методом Нистрёма — специальным вариантом квадратурного метода. Установлены оценки погрешности и доказана сходимость приближенных решений к точному в определенном пространстве непрерывных весовых функций. В указанных работах по уравнениям третьего рода с фиксированными особенностями в ядре аппарат обобщенных функций не привлекается. Первые результаты по разрешимости уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре в классе обобщенных функций получены Н.С. Габбасовым (2009 г.).

Таким образом, из приведенного выше краткого обзора работ по уравнениям третьего рода с фиксированными особенностями в ядре следует, что вопросы разрешимости таких уравнений в пространстве обобщенных функций мало исследованы. В частности, задача построения, обоснования и оптимизации методов приближенного решения уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре в классах обобщенных функций, по существу, оставалась открытой.

Цель работы — построение полной теории разрешимости уравнений третьего рода с коэффициентом, имеющим в промежутке интегрирования конечное множество нулей степенного порядка, и ядром, имеющим особенности произвольного степенного порядка на концах рассматриваемого отрезка; разработка и теоретическое обоснование методов приближенного решения уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре в пространстве обобщенных функций.

В диссертации, следуя Л.В. Канторовичу и Б.Г. Габдулхаеву, под теоретическим обоснованием приближенных методов понимается следующий круг задач: а) доказательство теорем существования и единственности решения приближенного уравнения; б) установление оценок погрешности приближенного решения; в) доказательство сходимости приближенных решений к точному решению и исследование скорости сходимости; г) исследование устойчивости и обусловленности приближенных уравнений; д) оптимизация по порядку точности предлагаемых приближенных методов.

Методика исследований. При выводе и обосновании полученных в диссертации результатов существенно используются теории обобщенных функций, операторов Нётера, приближения функций и общая теория приближенных методов анализа. При этом подходы и доказательства, приведенные в работе, основываются на использовании результатов и методики исследований, предложенных в монографии научного руководителя.

Научная новизна. В диссертации введены специальные пространства основных функций, изучены их свойства, и построены специальные элементы теории приближения в этих пространствах, приспособленные к приближенному решению уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре. Для исследуемых уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре построена полная теория разрешимости в пространстве обобщенных функций (фредгольмовость, условия разрешимости, алгоритм отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора уравнения). Проведено теоретическое обоснование как классических, так и разработанных в работе специальных методов решения уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре в пространстве обобщенных функций. Решена задача оптимизации проекционных методов решения уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре, при этом установлены оптимальные по порядку точности "полиномиальные" и "сплайновые" методы решения этих уравнений.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Предложенные методы и полученные в ней результаты могут быть использованы при дальнейшем развитии теории интегральных уравнений в классах обобщенных функций, а также при решении конкретных прикладных задач, приводящихся к такого рода уравнениям.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на итоговых научных конференциях Казанского университета (2009 — 2011 гг.), на молодежной научной школе–конференции "Лобачевские чтения — 2009" (Казань), на Республиканских научно-практических конференциях "Наука, технологии и коммуникации в современном обществе" (Набережные Челны, 2009 — 2011 гг.), на международной Казанской летней научной школе–конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2009, 2011 гг.), на Саратовской зимней школе “Современные проблемы теории функций и их приложения” (Саратов, 2010 г.), на международной конференции “Теория приближений”, посвященной 90-летию С.Б. Стечкина (Москва, 2010 г.), а также были представлены на Воронежской весенней математической школе “Понтрягинские чтения — XXI” (Воронеж, 2010 г.) и на VI международном симпозиуме “Ряды Фурье и их приложения” (Ростов-на-Дону, 2010 г.). Результаты диссертационного исследования в целом докладывались и обсуждались в Казанском федеральном университете (КФУ) на семинаре кафедры теории функций и приближений (2010 г., руководители — проф. Ф.Г. Авхадиев, доц. Ю.Р. Агачев) и на совместном заседании кафедр математического анализа и теории функций и приближений (2011 г.), в филиале КФУ в г. Набережные Челны на семинаре кафедры высшей математики (2011 г., руководитель — проф. Н.С. Габбасов), в Набережночелнинском государственном педагогическом институте на семинаре кафедры математического анализа (2010 г., руководитель — проф. Н.С. Габбасов).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах, список которых приведен в конце автореферата. В совместных работах научному руководителю принадлежат постановка задач и определение общего подхода к исследованиям, соответствующие результаты получены лично диссертантом.

Объем и структура работы. Диссертация изложена на 111 страницах машинописного текста и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 86 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение включает в себя обоснование актуальности темы исследования, обзор работ по теме диссертации и краткое изложение полученных автором результатов.

В **первой главе** вводятся основные пространства, изучаются их функциональные свойства, необходимые в дальнейших исследованиях, и строится специальная теория приближения в этих пространствах.

В §1.1 вводится класс $Y \equiv C_{0;1}^{\{m\};\{p\}}$ точечно "гладких" функций, изучаются некоторые его свойства. В частности, доказаны теоремы о вложении банаховых пространств.

Пусть $C \equiv C(I)$ — пространство непрерывных на $I \equiv [-1,1]$ функций с обычной max-нормой и $m \in N$. Через $C_{t_0}^{\{m\}} \equiv C\{m;t_0\}$ обозначается класс функций $g \in C$, имеющих в точке $t_0 \in (-1,1)$ тейлоровскую производную $g^{\{m\}}(t_0)$ порядка m.

Пусть $p \in \mathbb{R}^+$. Через $C\{p;1\}$ обозначается пространство функций $g \in C$, имеющих левые тейлоровские производные $g^{\{i\}}(1)$ $(i = \overline{1,[p]})$ в точке $t = 1$, причем в случае $p \neq [p]$ ($[\cdot]$ — целая часть) существует конечный предел

$$\lim_{t\to 1-}\left\{\left[g(t) - \sum_{j=0}^{[p]} g^{\{j\}}(1)\frac{(t-1)^j}{j!}\right](1-t)^{-p}\right\}.$$

Векторное пространство $C\{p,1\}$ снабдим нормой

$$\|g\|_{\{p\}} \equiv \|Sg\|_C + \sum_{i=0}^{\lambda} |g^{\{i\}}(1)|,$$

где

$$Sg \equiv \left[g(t) - \sum_{i=0}^{\lambda} g^{\{i\}}(1)\frac{(t-1)^i}{i!}\right](1-t)^{-p} \equiv G(t) \in C,$$

$\lambda = \lambda(p) \equiv [p] - (1 + \mathrm{sign}([p]-p))$, $G(1) \equiv \lim\limits_{t\to 1-} G(t)$. Далее образуем основное пространство

$$Y \equiv C_{0;1}^{\{m\};\{p\}} \equiv C_{0;1}^{\{m\};\{p\}}(I) \equiv \{y \in C\{m;0\} | Ty \in C\{p;1\}\}$$

(считаем, что $C\{0;1\} \equiv C$, а следовательно $C_{0;1}^{\{0\};\{0\}} \equiv C$). Пространство Y полно относительно нормы

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_{\{p\}} + \sum_{i=0}^{m-1} |y^{\{i\}}(0)| \ \ (y \in Y).$$

Здесь

$$Tf \equiv \left[f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{\{i\}}(0)t^i/i!\right]\frac{1}{t^m} \equiv F(t) \in C.$$

В §1.2 вводится пространство $X \equiv D^{\{p\}}\{m;0\}$, устанавливаются некоторые его свойства, в частности, доказывается, что пространства X

и Y являются взаимно союзными, а также приводится ряд необходимых определений и вспомогательных фактов.

Через X обозначается семейство обобщенных функций $x(t)$, определенных на основном пространстве Y, вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t),$$

где $t \in I$, $z \in C\{p;1\}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ — соответственно дельта-функция Дирака и ее „тейлоровские“ производные, определенные на Y по следующему правилу:

$$(\delta^{\{i\}}, y) \equiv \int_{-1}^{1} \delta^{\{i\}}(t) y(t) dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(0) \ (y \in Y, i = \overline{0, m-1}).$$

В §1.3 строятся элементы специальной теории приближения в пространствах X и Y. В частности, устанавливаются аналоги теоремы Вейерштрасса, исследуются поперечники по Колмогорову множеств в X и Y, вопрос о наилучшем приближении функций из X и Y.

Обозначим через

$$\Pi_n^{ST} \equiv \Pi_{n+m+\lambda+1}^{ST} \equiv UV(\Pi_{n-1}) \oplus \Pi_{m+\lambda} \equiv$$
$$\equiv \left\{ t^m (1-t)^p \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t^i + t^m \sum_{i=0}^{\lambda} \beta_i t^i + \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i t^i \,\middle|\, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$(n+m+\lambda+1)$-мерное подпространство пространства Y. Здесь Π_l — множество всех алгебраических полиномов степени не выше l : $\Pi_l \equiv span\{t^i\}_0^l$, $Uf \equiv t^m f(t)$, $Vf \equiv (1-t)^p f(t)$ $(f \in C)$.

Введем обозначение наилучшего приближения функций $y \in Y$, элементами $y_n \in Y_n \equiv \Pi_n^{ST}$

$$E_{n+m+\lambda+1}^{ST}(y) \equiv \inf_{y_n \in Y_n} \|y - y_n\|_Y \quad (y \in Y).$$

Теорема 1.3.2 *Для любого $y \in Y$ при любом $n \in \mathbb{N}$ существует элемент $y_n^0 \in Y_n$ наилучшего приближения, причем*

$$E_{n+m+\lambda+1}^{ST}(y) = E_{n-1}(STy),$$

где $E_l(g)$ — наилучшее равномерное приближение $g \in C$ полиномами из Π_l.

Пусть

$$\Pi_n^\delta \equiv \Pi_{n+m+\lambda+1}^\delta \equiv V(\Pi_{n-1}) \oplus \Pi_\lambda \oplus span\{\delta^{\{i\}}(t)\}_0^{m-1},$$

$$E_{n+m+\lambda+1}^\delta(x) \equiv \inf_{x_n \in \Pi_n^\delta} \|x - x_n\|_X \quad (x \in X),$$

а $d_l(Q, X)$ обозначает l-й поперечник по Колмогорову множества Q в пространстве X.

Теорема 1.3.5 *Для всякой обобщенной функции $x \in X$ при любом $n \in \mathbb{N}$ существует элемент $\tilde{x}_n \in \Pi_n^\delta$ наилучшего приближения, причем*

$$E_{n+m+\lambda+1}^\delta(x) = E_{n-1}(STUx).$$

Теорема 1.3.6 *Для любого множества $Q \subset X$ справедливо соотношение*

$$d_{n+m+\lambda+1}(Q, X) = d_n(STU(Q), C) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

В §1.4 устанавливаются аппроксимативные свойства специальных линейных "полиномиальных" операторов. **Во второй главе** излагаются полученные в работе результаты по теории разрешимости уравнений Фредгольма третьего рода с фиксированными особенностями в ядре в пространстве X. Кроме того, дается теоретическое обоснование ряда классических прямых методов решения уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре в пространстве обобщенных функций.

§2.1 посвящен исследованию разрешимости уравнений третьего рода

$$(Ax)(t) \equiv (Ux)(t) + (Kx)(t) = y(t) \quad (t \in I), \tag{2}$$

где $(Ux)(t) \equiv t^m x(t)$, $(Kx)(t) \equiv \int_{-1}^1 K(t,s)(1-s)^{-p} x(s)ds$, $p \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{N}$; K и y — известные непрерывные функции, а x — искомый элемент. Устанавливается фредгольмовость оператора $A : X \to Y$ при выполнении условий:

$$K \in C_s^{\{p\}}(I^2),\ K(t,\cdot) \in Y,\ \psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t,1) \in Y\ (i = \overline{0,\lambda}),$$

$$\tau_j(t) \equiv K_s^{\{j\}}(t,0) \in Y \ (j=\overline{0,m-1});$$
$$u \equiv S_s K \in C_t^{\{m\}}(I^2),\ \theta_i(s) \equiv u_t^{\{i\}}(0,s) \in C \ (i=\overline{0,m-1}); \qquad (3)$$
$$\upsilon \equiv T_t u \in C_t^{\{p\}}(I^2),\ \varphi_i(s) \equiv \upsilon_t^{\{i\}}(1,s) \in C \ (i=\overline{0,\lambda});$$

даются необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородного уравнения в виде требований ортогональности правой части всем решениям соответствующего однородного союзного уравнения.

В дальнейшем при обосновании приближенных методов решения операторных уравнений существенную роль играет непрерывная обратимость соответствующих операторов. В связи с этим в §2.2 даются достаточные условия непрерывной обратимости оператора A, определенного соотношением (2), и указывается метод отыскания точного решения уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре в пространстве X обобщенных функций.

Теорема 2.2.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) ядро $K(t,s)$ удовлетворяет требованиям (3), $y \in Y$;

2) число $\lambda = -1$ не является собственным значением ядра $K_0(t,s) \equiv (T_t K)(t,s)(1-s)^{-p}$;

3) линейная система

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i (Q\Psi_i)^{\{j\}}(0) = (Qy)^{\{j\}}(0) \ (j=\overline{0,m-1}),$$

где $Q \equiv E - KRT : Y \to Y$, E – единичный оператор в Y, R — разрешающий оператор ядра K_0,

$$\Psi_i(t) \equiv \sum_{l=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ l \end{pmatrix} \tau_l(t) \prod_{k=0}^{i-l-1} (p+k) \ (i=\overline{0,m-1}),$$

имеет единственное решение $\{\omega_i^*\}_{i=0}^{m-1}$.

Тогда для любой правой части $y \in Y$ уравнение третьего рода с фиксированными особенностями в ядре (2) имеет единственное обобщенное решение $x^* \in X$, которое дается формулой

$$x^*(t) = (RTy)(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i^* (RT\Psi_i)(t) + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \omega_i^* \delta^{\{i\}}(t).$$

Следствие. *В условиях теоремы интегральный оператор третьего рода $A : X \to Y$ непрерывно обратим.*

§2.3 содержит постановки задач обоснования и оптимизации прямых и проекционных методов решения линейных операторных уравнений и ряд вспомогательных результатов из общей теории приближенных методов.

В §2.4 дается обоснование вычислительных схем методов моментов, коллокации и подобластей для уравнения (2) в пространстве X.

Пусть дано уравнение (2), в котором ядро K удовлетворяет условиям (3), $y \in Y$. Приближенное решение ищется в виде

$$x_n(t) \equiv (1-t)^p \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i + \sum_{i=0}^{\lambda} c_{i+n}(t-1)^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+\lambda+n+1}\delta^{\{i\}}(t) \quad (n-1 \in \mathbb{N}), \quad (4)$$

где неизвестные коэффициенты $c_i = c_i^{(n)}$ $(i = \overline{0, n+m+\lambda})$ находятся согласно методу подобластей из условий:

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (Ax_n - y)(t)dt = 0 \quad (j = \overline{0, n+m+\lambda}), \quad (5)$$

здесь $\{\tau_j\}_0^{n+m+\lambda+1}$ — система узлов Чебышева второго рода, обогащенная концами промежутка I.

Справедлива

Теорема 2.4.5 *Пусть $Ax = 0$ имеет в X лишь нулевое решение, а функции $h \equiv S_t v$ (по t), $\alpha_j \equiv ST\psi_j$ $(j = \overline{0, \lambda})$, $\beta_i \equiv ST\Psi_i$ $(i = \overline{0, m-1})$, $STy \in C^{(l)}$ $(l \equiv 2(m + \lambda + 1))$, причем производные $h_t^{(l)}$ (по t равномерно относительно s), $\alpha_j^{(l)}$, $\beta_i^{(l)}$, $(STy)^{(l)}$ принадлежат классу Дини – Липшица. Тогда при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ приближенные решения $x_n^*(t)$, определяемые из (4), (5), существуют, единственны и сходятся по норме X к точному решению $x^*(t)$ УТРФО (2) со скоростью*

$$\|x_n^* - x^*\| = O\left\{\left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{j=0}^{\lambda} E_{n-1}(\alpha_j) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(\beta_i) + E_{n-1}(STy)\right] n^l \ln n\right\}.$$

Результаты §2.4 показывают, что при решении уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре классическими приближенными методами, для их сходмости требуется большая степень гладкости. В этой связи в **третьей главе** строятся и обосновываются специальные прямые методы, имеющие существенное преимущество перед классическими методами по скорости сходимости приближенных решений.

В §3.1 предлагаются и обосновываются специальные “полиномиальные” методы.

Пусть имеем уравнение (2), в котором исходные данные K и y таковы, что выполняются условия (3) и $y \in Y$. Приближенное решение ищется в виде (4), где искомые коэффициенты $\{c_i\}_0^{n+m+\lambda}$ находятся согласно обобщенному методу подобластей из условий:

$$\begin{gathered}\int_{\nu_{j-1}}^{\nu_j} (STAx_n - STy)(t)dt = 0 \quad (j = \overline{1,n}),\\ (Ax_n - y)^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{0,m-1}),\\ (TAx_n - Ty)^{\{j\}}(1) = 0 \quad (j = \overline{0,\lambda}),\end{gathered} \tag{6}$$

где $\{\nu_j\}_0^n$ — система узлов Чебышева второго рода, содержащая концы I.

Верна следующая

Теорема 3.1.5 *Пусть* $kerA = \{0\}$, *а* $h \equiv S_t v$ *(по t),* $\alpha_j \equiv ST\psi_j$, $\beta_i \equiv ST\Psi_i$, STy *принадлежат классу Дини – Липшица. Тогда при всех* $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant n_0)$ *приближенные решения* x_n^*, *построенные согласно (4) и (6), существуют, единственны и сходятся к точному решению* x^* *с быстротой*

$$\|x_n^* - x^*\| = O\left\{\left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{j=0}^{\lambda} E_{n-1}(\alpha_j) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(\beta_i) + E_{n-1}(STy)\right]\ln n\right\}.$$

Следствие. *Если h (по t), α_j β_i, $STy \in H_\alpha^r$ $(0 < \alpha \leqslant 1, r+1 \in \mathbb{N})$, то в условиях теоремы 3.1.5 справедлива оценка*

$$\|x_n^* - x^*\| = O\left(n^{-r-\alpha}\ln n\right).$$

При $m = p = 0$ рассматриваемое уравнение превращается в уравнение второго рода в C, а проекционный метод (4), (6) — в известный метод подобластей, причем $STy \equiv y$, $h \equiv K$. Следовательно, теорема 3.1.5

содержит в себе известные результаты по обоснованию метода подобластей для уравнения второго рода.

Аналогичные результаты получены для обобщенных методов моментов и коллокации. Основные результаты сформулированы в теоремах 3.1.1 и 3.1.3.

В §3.2 предлагаются и обосновываются специальные "сплайновые" методы решения уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре в пространстве X, являющиеся в некотором смысле обобщением известных методов сплайн-коллокации, и сплайн-подобластей на базе сплайнов первого и второго порядка и обладающие существенным преимуществом перед ними в смысле улучшения скорости сходимости приближенных решений указанных уравнений (2).

В §3.3 устанавливается, что предложенные в диссертации специальные обобщенные методы подобластей, моментов и коллокации оптимальны по порядку точности среди всех "полиномиальных" проекционных методов, а обобщенные сплайн-методы — среди всех прямых проекционных методов решения уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре. Приведем один из установленных результатов.

Следуя Б.Г.Габдулхаеву, через $V_N(F)$ обозначим оптимальную оценку погрешности всевозможных проекционных методов решения данного операторного уравнения на классе F. Рассмотрим оптимизацию на классе однозначно разрешимых в X уравнений вида (2) в случае, когда исходные данные принадлежат семейству $YH_\omega^r \equiv \{y \in Y | STy \in H_\omega^r\}$ $(r+1 \in \mathbb{N})$. Пусть $\mathfrak{G}_n^{(2)} \equiv \{\Gamma_n\}$ — совокупность всех "полиномиальных" операторов $\Gamma_n : Y \to Y_n$, удовлетворяющих условию $\|\Gamma_n\| n^{-r}\omega(n^{-1}) = o(1)$ $(n \to \infty)$, отображающих Y на подпространство Y_n размерности $n+m+\lambda+1$.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $F = YH_\omega^r$. *Тогда*

$$V_N(F) \asymp N^{-r}\omega(N^{-1}) \ln N \quad (N = n+m+\lambda+1)$$

и этот оптимальный порядок реализует предложенный выше обобщенный метод подобластей.

В §3.4 приводятся заключительные замечания о переносе всех изложенных результатов по разработке, обоснованию и оптимизации прямых методов решения уравнения (2) на исследуемый общий случай уравнений третьего рода с фиксированными особенностями в ядре.

Заключение. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Построена теория разрешимости интегральных уравнений третьего рода с коэффициентом, имеющим нули степенного порядка, и ядром с фиксированными степенными особенностями (фредгольмовость, условия разрешимости, метод отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора уравнения).

2. Обоснованы вычислительные алгоритмы классических прямых методов решения исследуемых уравнений в пространстве обобщенных функций.

3. Разработаны и обоснованы специальные прямые методы решения изучаемых уравнений, обладающие существенным преимуществом перед классическими методами в смысле скорости сходимости приближенных решений.

4. Решена задача оптимизации проекционных методов решения уравнений третьего рода с особенностями в ядре, установлено, что предложенные в работе обобщенные методы являются оптимальными по порядку точности.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Габбасов, Н.С. Об одном уравнении третьего рода с фиксированными особенностями в ядре / Н.С. Габбасов, Р.Р. Замалиев // Материалы респ. Науч.-прак. конф. "Наука, технол. и коммуник. в совр. обществе". — Наб. Челны, 2009. — Т. 2. — С. 41–44.
2. Габбасов, Н.С. Обобщенное решение интегрального уравнения третьего рода с фиксированными особенностями в ядре / Н.С. Габбасов, Р.Р. Замалиев // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 2009. — Т. 38. — С. 76–79.
3. Замалиев, Р.Р. Об одном аппроксимирующем операторе / Р.Р. Замалиев // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 2009. — Т. 38. — С. 129–131.
4. Замалиев, Р.Р. Прямой метод решения интегрального уравнения третьего рода с особенностями в ядре / Р.Р. Замалиев // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 2009. — Т. 39. — С. 218–222.

5. Замалиев, Р.Р. Оператор обобщенного метода подобластей / Р.Р. Замалиев // Материалы 15-й Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения”. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. — С. 74–75.
6. Замалиев, Р.Р. Обобщенный метод подобластей для одного интегрального уравнения третьего рода / Р.Р. Замалиев // Тез. докл. междунар. симп. "Ряды Фурье и из приложения". — Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2010. — С. 72–73.
7. Замалиев, Р.Р. Один новый вариант сплайн-метода подобластей для интегрального уравнения третьего рода с особенностями в ядре / Р.Р. Замалиев // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения — XXI". — Воронеж: Издательско-полиграфкий центр Воронежского гос. ун-та, 2010. — С. 92–94.
8. Замалиев, Р.Р. К оптимизации проекционных методов решения одного класса интегральных уравнений / Р.Р. Замалиев // тез. докл. междунар. конф. “Теория приближений”, посвященной 90-летию С.Б. Стечкина. — М., 2010. — С. 32–33.
9. Замалиев, Р.Р. О двух вариантах метода коллокаций решения одного класса интегральных уравнений / Р.Р. Замалиев // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 2011. — Т. 43. — С. 141–144.
10. **Габбасов, Н.С. Новые варианты сплайн-методов для интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре / Н.С. Габбасов, Р.Р. Замалиев // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46. — № 9. — С. 1320–1328.**
11. **Габбасов, Н.С. Новый вариант метода подобластей для интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре / Н.С. Габбасов, Р.Р. Замалиев // Изв. вузов. Математика. — 2011. — № 5. — С. 12–18.**